For the English version see below, after the Italian one.

# EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES:

La regina della fluidodinamica.
Una dimostrazione semplice, ma completa.


*di Leonardo* ***Rubino***
leonrubino@yahoo.it



Settembre 2010 – Rev. 00
Pubblicata su www.fisicamente.net


Equazione di Navier-Stokes nel caso di fluido incomprimibile, cioè con $\rho = const$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$:
(questa situazione abbraccia la maggioranza dei casi)

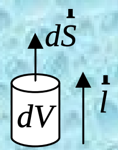
$\boxed{\rho[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla} v^2] = -\vec{\nabla} p - \rho \vec{\nabla} \varphi + \eta \nabla^2 \vec{v}}$ con $\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$ (vorticità), η (viscosità), $\varphi$ (potenziale gravitazionale), ρ (densità), $\vec{v}$ (velocità), t (tempo).

Dimostrazione:

-partiamo dall'Equazione di Continuità $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0$, di cui diamo prova:

$\rho \vec{v} = \vec{J}$ è la densità di corrente di massa $[\frac{kg/s}{m^2}]$ (dimensionalmente ovvia)

$M = \int_V \rho \cdot dV$ (ritenuta ovvia)




Si ha: $\frac{\partial}{\partial t} M = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \cdot dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dV = -\int_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$ , infatti, a livello dimensionale:

$dV = \vec{l} \cdot d\vec{S}$ e quindi $\frac{\partial}{\partial t} dV = d\vec{S} \frac{\partial \vec{l}}{\partial t} = d\vec{S} \cdot \vec{v}$ ed il segno – si ha in caso di massa che "esce".

Dunque: $\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_S (\rho \vec{v}) \cdot d\vec{S} = -\int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \cdot dV$ , avendo usato il Teorema della Divergenza nell'ultima eguaglianza.

Quindi: $\int_V [\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v})] dV = 0$ , da cui appunto l'Eq. Di Continuità.

-e partiamo anche dall'<u>Equazione di Eulero</u> ($\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}=-\frac{\vec{\nabla}p}{\rho}$), di cui anche diamo prova:
(p è la pressione; inoltre, la stessa è un primo abbozzo di Equazione di Navier-Stokes, dove però non si tiene ancora conto del campo gravitazionale e delle forze viscose)
La forza agente su un volumetto di fluido dV è $d\vec{f}=-p\cdot d\vec{S}$ , con il segno -, in quanto consideriamo una forza verso il volumetto. Inoltre:
$\vec{f}=-\int_S p\cdot d\vec{S}=-\int_V \vec{\nabla}p\cdot dV$ , dopo aver usato un duale del Teorema della Divergenza (formula di Green), per passare dall'integrale di superficie a quello di volume.
Abbiamo poi che: $\frac{\partial \vec{f}}{\partial V}=\frac{\partial}{\partial V}[-\int_V \vec{\nabla}p\cdot dV]=-\vec{\nabla}p$, ma è contemporaneamente vero che, <u>a livello dimensionale</u>:

$\frac{\partial \vec{f}}{\partial V}=\frac{d}{dV}[M\frac{d\vec{v}}{dt}]=\frac{dM}{dV}\frac{d\vec{v}}{dt}=\rho\frac{d\vec{v}}{dt}=$ e dalle due si ha:

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt}=-\vec{\nabla}p\,. \qquad (1.1)$$

Ricordando ora che: $d\vec{l}=(dx,dy,dz)$ , $\vec{\nabla}=(\frac{d}{dx},\frac{d}{dy},\frac{d}{dz})$ e $\vec{v}=(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt})$ , possiamo banalmente scrivere che:

$\vec{v}\cdot ...$

$\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}}\boxed{\frac{dx}{dt}}+\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial y}}\boxed{\frac{dy}{dt}}+\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial z}}\boxed{\frac{dz}{dt}}=\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}=\frac{d\vec{v}}{dt}$ e per la (1.1) si ha infine che:

$...\vec{\nabla})\vec{v}$

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}=-\frac{\vec{\nabla}p}{\rho}$ e cioè l'Eq. Di Eulero appunto.

Ora, i termini di questa Equazione di Eulero hanno proprio le dimensioni di un'accelerazione $\vec{a}$; dunque, volendo tener conto anche del campo gravitazionale, a secondo membro si può sommare algebricamente l'accelerazione di gravità $\vec{g}$, con il segno meno, poiché la stessa è rivolta verso il basso.
Sappiamo però dalla gravitazione che il gradiente del potenziale $\phi$ è proprio $\vec{g}$ ($\vec{\nabla}\phi=\vec{g}$), da cui, dunque:

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}=-\frac{\vec{\nabla}p}{\rho}-\vec{\nabla}\phi$ . Valendo ora la seguente identità vettoriale:

$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}=(\vec{\nabla}\times\vec{v})\times\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{v})$ , e ricordando l'espressione per la vorticità di pagina 1 ($\vec{\Omega}=\vec{\nabla}\times\vec{v}$), si ha:

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v} + \frac{1}{2}\nabla v^2 = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \vec{\nabla} \varphi$ e sin qui abbiamo dunque tenuto conto anche del campo gravitazionale.

Nel caso più generale in cui si abbia a che fare con un fluido <u>viscoso</u>, andrà aggiunta una componente di forza viscosa:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla} v^2 = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \vec{\nabla} \varphi + \frac{\vec{f}_{visc}}{\rho} \qquad (1.2)$$

dove la $\vec{f}_{visc}$ compare divisa per la densità per una questione di compatibilità dimensionale con gli altri termini nell'equazione.
La (1.2) è già l'Equazione di Navier-Stokes, dove però ci manca ancora di valutare la forza viscosa $\vec{f}_{visc}$ .

Noi valuteremo $\vec{f}_{visc}$ nel caso di fluidi incomprimibili, cioè fluidi per cui $\rho = const$, >> $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ da cui, per l'Equazione di Continuità, $\vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0$, >> $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$.

---------------------------------

**<u>Calcolo di</u>** $\vec{f}_{visc}$:

<u>VISCOSITA':</u>

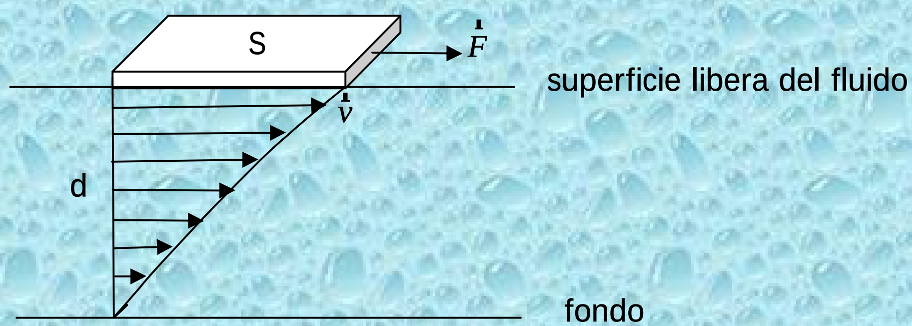



Fig. 1.

Sappiamo dalla fisica generale che: $\frac{\vec{F}}{S} = \eta \frac{\vec{v}}{d}$ , (1.3)

e cioè, per trascinare la lastra di area di base S sul fluido, a distanza d dal fondo, e per trascinarla con velocità $\vec{v}$, serve una forza $\vec{F}$.
Scriviamo ora la (1.3) in forma differenziale, per sforzi $\vec{\tau}$ e per componenti: (x)

$\tau_x = \frac{F_x}{S} = \eta \frac{\partial u}{\partial y}$ , avendo posto $\vec{v} = (u, v, w)$, e dunque:

$$F_x = \eta \frac{\partial u}{\partial y} \cdot S \qquad (1.4)$$

Applichiamo ora la (1.4) ad un volumetto di fluido dV di Fig. 2:

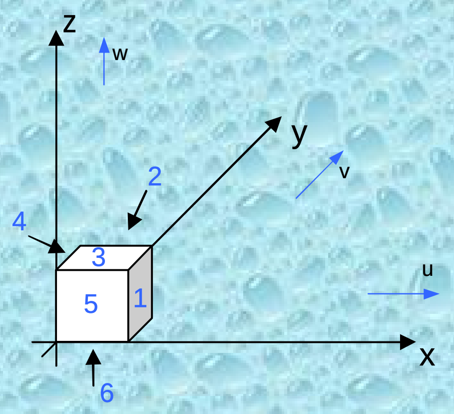



Fig. 2: Volumetto di fluido dV.

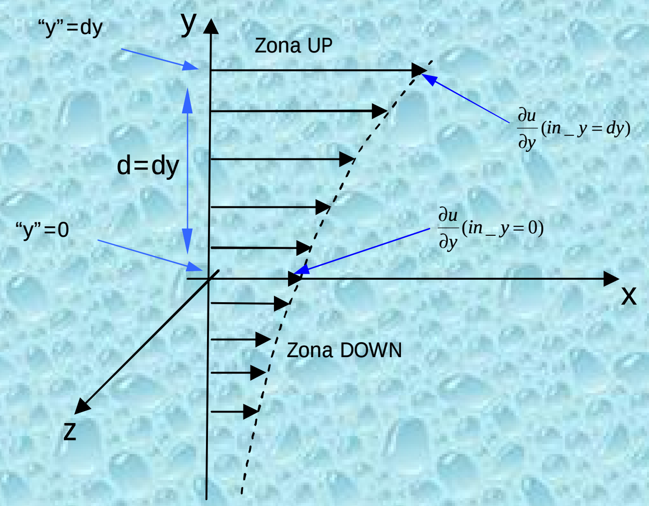



Fig. 3: Asse y, facce 2 e 5.

In Fig. 3 abbiamo riportato quanto esposto in Fig. 1, ma in un contesto tridimensionale.

<u>Facce 2 e 5:</u>

Con riferimento dunque alla Fig. 3, valutiamo le forze viscose (dovute alle variazioni di u) sulle facce 2 e 5 del volumetto, quelle cioè che si incontrano muovendosi lungo l'asse y, applicando la (1.4):

<u>Sforzo di taglio viscoso sulla faccia 2</u> $= +h[\frac{\partial u}{\partial y}(in\_y = dy)]dxdz$

$\frac{v}{d}$ *della_*(1.3) $\quad$ $S\_della\_(1.3)$

Questa forza agente sulla faccia 2 è positiva (+) perché il fluido che è al disopra del punto in cui la stessa viene calcolata (zona UP) ha una velocità maggiore (frecce orizzontali più lunghe) che trascina S lungo la x positiva.

Sulla faccia 5, invece, si avrà il segno (-), in quanto il fluido al disotto di tale S ha velocità più bassa (down) e vuole essere trascinato, determinando una resistenza, cioè una forza negativa:

<u>Sforzo di taglio viscoso sulla faccia 5</u> $= -h[\frac{\partial u}{\partial y}(in\_y = 0)]dxdz$

La risultante lungo x è data dalla differenza delle entità delle due, o meglio, dalla somma algebrica:

$F_{x(y)} = h[\frac{\partial u}{\partial y}(y = dy) - \frac{\partial u}{\partial y}(y = 0)]dxdz = h\,\frac{[\frac{\partial u}{\partial y}(y = dy) - \frac{\partial u}{\partial y}(y = 0)]}{dy}dxdydz = h\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dV$, dopo aver

moltiplicato numeratore e denominatore per dy. Dunque:

$$F_{x(y)} = h \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dV$$ (forza viscosa su x dovuta alla variazione di u lungo y) (1.5)

Facce 3 e 6:

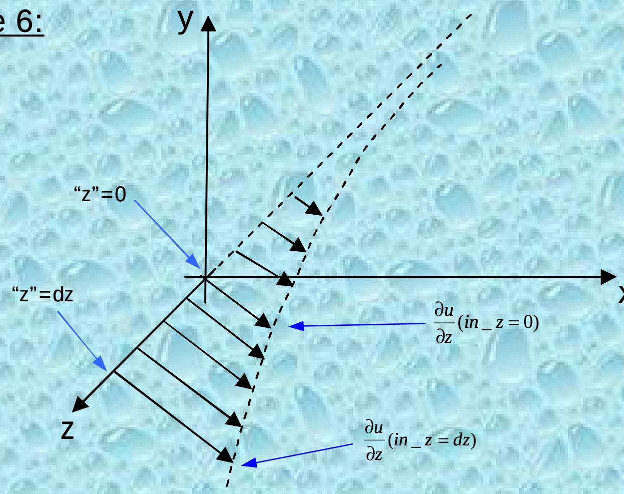



Fig. 4: Asse z, facce 3 e 6.

In analogia con il caso precedente, si ha come risultato:

$$F_{x(z)} = h \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dV$$ (forza viscosa su x dovuta alla variazione di u lungo z) (1.6)

Facce 1 e 4:

Per quanto riguarda il caso $F_{x(x)}$, e cioè della forza viscosa su x dovuta alla variazione di u (che è una componente su x) lungo x stessa, non si parlerà di sforzo di taglio, in quanto, in questo caso, la forza in questione è sempre lungo x, ma agisce su S=dydz, che è ortogonale ad x; si tratta dunque di una forza NORMALE, di trazione/compressione, e si fa riferimento alla Fig. 5 qui sotto:

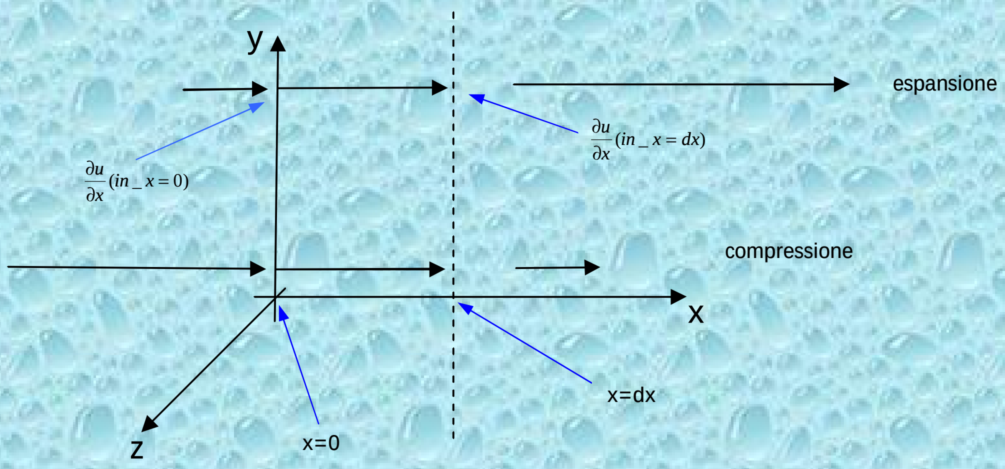



Fig. 5: Asse x, facce 1 e 4.

In ogni caso, nulla cambia analiticamente, rispetto ai casi precedenti, e si ha:

$$F_{x(x)} = h\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dV$$ (forza viscosa su x dovuta alla variazione di u lungo x stessa) (1.7)

Ora che abbiamo le tre componenti delle forze viscose agenti lungo x (e cioè quelle dovute alla variazione della componente u (comp. x) della velocità $\vec{v}$, rispetto ad y, z ed x stessa), sommiamole ed otteniamo $F_{x-visc}$ :

$$F_{x-visc} = h\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dV + h\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dV + h\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dV = h\cdot dV(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) = h\cdot dV\cdot\nabla^2 u$$ , che riscriviamo:

$$F_{x-visc} = h\cdot dV\cdot\nabla^2 u \qquad (1.8)$$

Effettuando ora gli stessi ragionamenti per una valutazione di $F_{y-visc}$ e di $F_{z-visc}$, si ottiene, ovviamente ($\vec{v} = (u,v,w)$):

$$F_{y-visc} = h\cdot dV\cdot\nabla^2 v \qquad (1.9)$$

$$F_{z-visc} = h\cdot dV\cdot\nabla^2 w \qquad (1.10)$$

da cui, finalmente, componendo le (1.8), (1.9), e (1.10), si ha:

$$\vec{F}_{visc} = F_{x-visc}\hat{x} + F_{y-visc}\hat{y} + F_{z-visc}\hat{z} = h\cdot dV[\hat{x}\nabla^2 u + \hat{y}\nabla^2 v + \hat{z}\nabla^2 w] = h\cdot dV\cdot\nabla^2\vec{v}$$ che riscriviamo:

$$\vec{F}_{visc} = h\cdot dV\cdot\nabla^2\vec{v} \qquad (1.11)$$

Ora, questa $\vec{F}_{visc}$ va usata nella (1.2), dopo averla divisa per $r$ e per dV (cioè per $M = r\cdot dV$), in quanto i membri della (1.2) hanno appunto le dimensioni di una forza fratto una massa, dunque:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega}\times\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2 = -\frac{\vec{\nabla}p}{r} - \vec{\nabla}f + \frac{h}{r}\cdot\nabla^2\vec{v} \qquad (1.12)$$

e cioè, finalmente, la <u>**Equazione di Navier-Stokes**</u>, che riscriviamo:

$$\underbrace{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega}\times\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2}_{\text{Accelerazione generale}} = \underbrace{-\frac{\vec{\nabla}p}{r}}_{\text{Forze di pressione}} \underbrace{- \vec{\nabla}f}_{\text{Forze di gravità}} + \underbrace{\frac{h}{r}\cdot\nabla^2\vec{v}}_{\text{Forze viscose}}$$

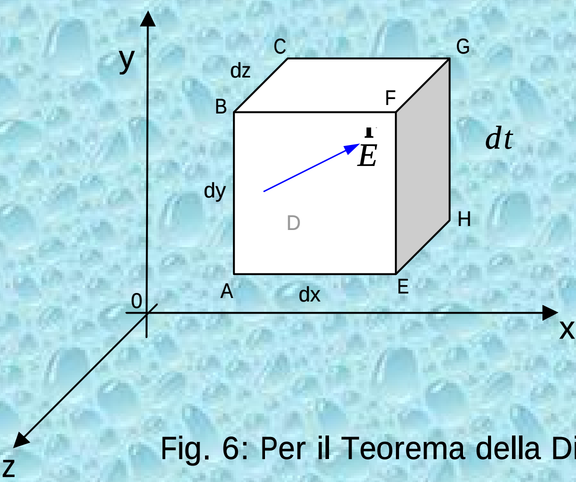
$$\frac{\vec{F}}{M} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial}........$$

## Appendici:

Appendice 1) Caso molto più raro di fluidi comprimibili:

per essi, cioè, $r \neq const$, >> $\frac{\partial r}{\partial t} \neq 0$, >> $\vec{\nabla}(r\vec{v}) \neq 0$, e alla (1.12) va aggiunto il seguente termine: $+\frac{(h+h')}{r}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})$ , ma la (1.12) abbraccia già una grandissima quantità di situazioni...

Appendice 2) Teorema della Divergenza (dimostrazione pratica):




$$\boxed{\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_V div\vec{E}\cdot dV}$$

Fig. 6: Per il Teorema della Divergenza.

Denominiamo $f$ il flusso del vettore $\vec{E}$; si ha:

$df_{ABCD} = \vec{E}\cdot d\vec{S} = -E_x(x,\bar{y},\bar{z})dydz$ ($\bar{y}$ significa y medio)

$df_{EFGH} = E_x(x+dx,\bar{y},\bar{z})dydz$ , ma si ha anche che, ovviamente (come sviluppo):

$E_x(x+dx,\bar{y},\bar{z}) = E_x(x,\bar{y},\bar{z}) + \frac{\partial E_x(x,\bar{y},\bar{z})}{\partial x}dx$ da cui:

$df_{EFGH} = E_x(x,\bar{y},\bar{z})dydz + \frac{\partial E_x(x,\bar{y},\bar{z})}{\partial x}dxdydz$ e dunque:

$df_{ABCD} + df_{EFGH} = \frac{\partial E_x}{\partial x}dV$ . Si agisce poi con analogia sugli altri assi y e z:

$$df_{AEHD} + df_{BCGF} = \frac{\partial E_y}{\partial y}dV$$

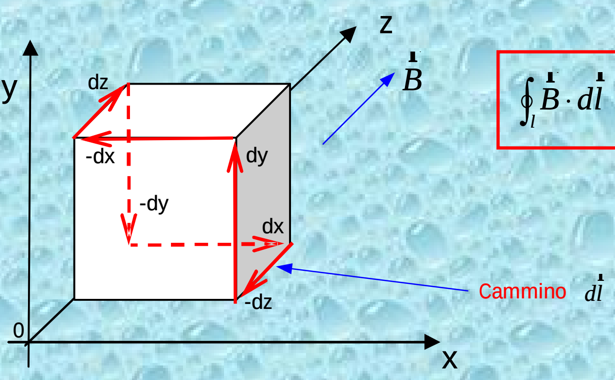
$$df_{ABFE} + df_{CGHD} = \frac{\partial E_z}{\partial z}dV$$

e si sommano tali flussi trovati, ottenendo, in totale:

$df = (\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z})dV = (div\cdot\vec{E})dV = (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})dV$ e dunque:

$f_S(\vec{E}) = \int_f df = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_V div\vec{E}\cdot dV = \int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\cdot dV$ e cioè l'asserto.

Appendice 3) <u>Teorema del Rotore o di Stokes (dimostrazione pratica-**by Rubino!**)</u>:




$$\boxed{\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_S rot\vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_S \vec{\nabla}\times\vec{B}\cdot d\vec{S}}$$

Fig. 7: Per il Teorema del Rotore (dim. by Rubino).

Valutiamo $\vec{B}\cdot d\vec{l}$ :

Su dz B vale $B_z$; su dx B vale $B_x$; su dy B vale $B_y$;

su -dz B vale $B_z+\frac{\partial B_z}{\partial x}dx-\frac{\partial B_z}{\partial y}dy$ , per lo sviluppo di Taylor in 3D ed anche per il fatto che per arrivare dal centro di dz e quello di –dz si sale su x, si scende su y e nulla lungo z stesso.

Analogamente, su -dx B vale $B_x-\frac{\partial B_x}{\partial z}dz+\frac{\partial B_x}{\partial y}dy$ e su -dy B vale $B_y-\frac{\partial B_y}{\partial x}dx+\frac{\partial B_y}{\partial z}dz$ .

Sommando tutti i contributi:

$$\vec{B}\cdot d\vec{l} = B_z dz-(B_z+\frac{\partial B_z}{\partial x}dx-\frac{\partial B_z}{\partial y}dy)dz+B_x dx-(B_x-\frac{\partial B_x}{\partial z}dz+\frac{\partial B_x}{\partial y}dy)dx+B_y dy-$$

$$+(B_y-\frac{\partial B_y}{\partial x}dx+\frac{\partial B_y}{\partial z}dz)dy=(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z})dydz+(\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x})dxdz+(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y})dxdy=$$

$$=rot\vec{B}\cdot d\vec{S}=\vec{\nabla}\times\vec{B}\cdot d\vec{S}$$ dove qui $d\vec{S}$ ha componenti [ $\hat{x}(dydz)\,,\hat{y}(dxdz)\,,\hat{z}(dxdy)$ ]

e cioè l'asserto: $\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_S rot\vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_S \vec{\nabla}\times\vec{B}\cdot d\vec{S}$ , dopo aver ricordato che:

$$rot\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} .$$

Appendice 4) <u>L'Equazione di Bernoulli:</u> $\frac{1}{2} r v^2 + p + rgz = 0$

Se ci troviamo in uno stato stazionario, dove $\vec{v} \neq f(t) >> \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ , poi $r = const$, e dove non si hanno forze viscose, la Equazione di Navier-Stokes si riduce sicuramente a quella di Eulero (completata però della componente gravitazionale):

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{r} - \vec{g}$ , e, anzi, visto che, come dicevamo, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$, si ha:

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{r} - \vec{g} \ . \qquad (1.13)$$

Se ora consideriamo la divergenza e il gradiente in termini di derivata direzionale, in direzione $\vec{dl}$ , nella fattispecie, allora si ha, nella (1.13): $\frac{dv}{dl}$ in luogo di $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ , e $\frac{dp}{dl}$ in luogo di $\vec{\nabla} p$ e poi, sempre nella (1.13), l'accelerazione di gravità $\vec{g}$ (che si esercita lungo z, verso il basso) va proiettata lungo $\vec{dl}$ ($\frac{dz}{dl}$ è il relativo coseno direttore), e dunque la (1.13) diventa:

$v\frac{dv}{dl} = -\frac{1}{r}\frac{dp}{dl} - g\frac{dz}{dl}$ , da cui: $vdv + \frac{1}{r}dp + gdz = 0$ ed effettuando l'integrazione di quest'ultima:

$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{r} + gz = 0$ , e moltiplicando tutto per la densità $r$ , si ottiene: $\frac{1}{2} r v^2 + p + rgz = 0$
e cioè proprio l'asserto!

--------------------------------

**Bibliografia:**


1) *(C. Mencuccini e S. Silvestrini)* FISICA I - Meccanica Termodinamica, Liguori.

2) *(* Y. Nakayama*)* INTRODUCTION TO FLUID MECHANICS - Butterworth Heinemann.

3) *(L. D. Landau & E. M. Lifshitz)* FLUID MECHANICS - Pergamon Press.

4) ME 563 - INTERMEDIATE FLUID DYNAMICS (Lectures).

5) *(R. Feynman)* LA FISICA DI FEYNMAN II – Zanichelli.


--------------------------------

# THE NAVIER-STOKES EQUATION:

The Queen of Fluid Dynamics.
A proof simple, but complete.

*by Leonardo* ***Rubino***
leonrubino@yahoo.it

September 2010 – Rev. 00
Published on www.fisicamente.net

The Navier-Stokes Equation in the case o fan incompressibile fluid, that is $\rho = const$ and $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$:
(this situations is about most of practical cases)

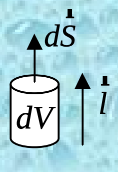
$\boxed{\rho[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla} v^2] = -\vec{\nabla} p - \rho \vec{\nabla} \varphi + \eta \nabla^2 \vec{v}}$ where $\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$ (vorticity), η (viscosity), $\varphi$ (gravitational potential), ρ (density), $\vec{v}$ (velocity), t (time).

Proof:

-Let's start from the Continuity Equation $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0$, and we prove it:

$\rho \vec{v} = \vec{J}$ is the mass current density $[\frac{kg/s}{m^2}]$ (dimensionally obvious)

$M = \int_V \rho \cdot dV$ (held obvious)



We have: $\frac{\partial}{\partial t} M = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \cdot dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dV = -\int_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$ ,in fact, in terms of dimensions:

$dV = \vec{l} \cdot d\vec{S}$ and so $\frac{\partial}{\partial t} dV = d\vec{S}\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} = d\vec{S} \cdot \vec{v}$ and sign – is in case of "escaping" mass.

So: $\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_S (\rho \vec{v}) \cdot d\vec{S} = -\int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \cdot dV$ , after having used the Divergence Theorem in the last equality.

Therefore: $\int_V [\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v})] dV = 0$ , from which we get the Continuity Equation.

-and let's also start from the <u>Euler's Equation</u> ($\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho}$), and we also prove this:
(p is the pressure; moreover, this equation is a sketch of the Navier-Stokes Equation, whereas we're not yet taking into account the gravitational field and the viscous forces)
The force acting on a small fluid volume dV is $d\vec{f} = -p \cdot d\vec{S}$ , with sign -, as we are dealing with a force towards the small volume. Moreover:
$\vec{f} = -\int_S p \cdot d\vec{S} = -\int_V \vec{\nabla} p \cdot dV$ , after having used a dual of the Divergence theorem (a Green's formula), to go from the surface integral to the volume one.

We also have: $\frac{\partial \vec{f}}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V}[-\int_V \vec{\nabla} p \cdot dV] = -\vec{\nabla} p$ , but, <u>in terms of dimensions</u>, it's simultaneously true that:
$\frac{\partial \vec{f}}{\partial V} = \frac{d}{dV}[M \frac{d\vec{v}}{dt}] = \frac{dM}{dV}\frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} =$ and from these two equations, we have:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p . \qquad (1.1)$$

Now we remind that: $d\vec{l} = (dx, dy, dz)$ , $\vec{\nabla} = (\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz})$ and $\vec{v} = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt})$ , so we can easily write that:

$\vec{v} \cdot ...$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}}\boxed{\frac{dx}{dt}} + \boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial y}}\boxed{\frac{dy}{dt}} + \boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial z}}\boxed{\frac{dz}{dt}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

and for (1.1) we finally have:

$...\vec{\nabla})\vec{v}$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho}$$ that is the Euler's Equation, indeed.

Now, the terms of this Euler's Equation have the dimensiono f an acceleration $\vec{a}$ ; so, if we want to take into account the gravitational field, too, on the right side we can algebraically add the gravitational acceleration $\vec{g}$ , with a negative sign, as it's downwards.
But we know that the gradient of the potential $f$ is really $\vec{g}$ ($\vec{\nabla} f = \vec{g}$), so:

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \vec{\nabla} f$ . As the following vectorial identity is in force:
$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{v})$ , and if we take the expression for the vorticity, on page 1, ($\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$), we have:
$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla} v^2 = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \vec{\nabla} f$ and, so far, we have also taken into account the gravitational field.

In the most general case where we have to do with a viscous fluid , we'll also add a viscous force component:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla} v^2 = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \vec{\nabla} f + \frac{\vec{f}_{visc}}{\rho} \qquad (1.2)$$

whereas $\vec{f}_{visc}$ is divided by the density because of the dimension compatibilità with other terms in that equation.

(1.2) is already the Navier-Stokes Equation, whereas the viscous force $\vec{f}_{visc}$ is still to be evaluated.

We will evaluate $\vec{f}_{visc}$ in the case of incompressibile fluids, that is fluids with $\rho = const$, >> $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ so, for the Continuity Equations, $\vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0$, >> $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$.

---------------------------------

**Calculation of** $\vec{f}_{visc}$ :

VISCOSITY:

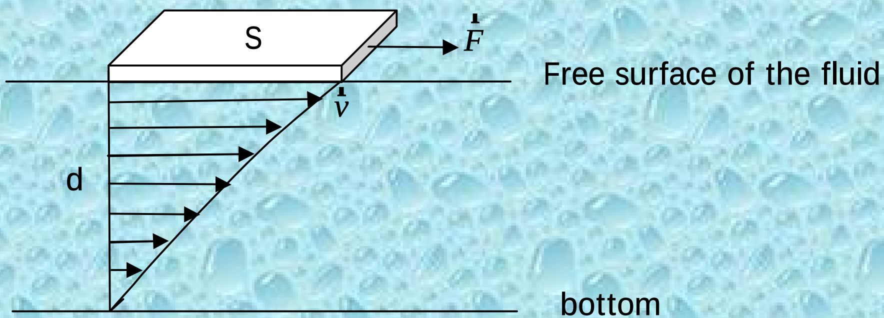



Fig. 1.

We know from general physics that: $\frac{\vec{F}}{S} = \eta \frac{\vec{v}}{d}$ , (1.3)

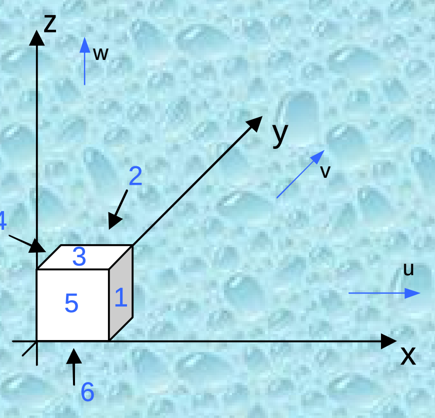
That is, in order to drag the slab whose base surface is S, over the fluid, at a d distance from the bottom, and drag it at a $\vec{v}$ speed, we need a force $\vec{F}$

Now, let's write down (1.3) in a differential form, for stresses $\vec{\tau}$ and for components: (x)

$\tau_x = \frac{F_x}{S} = \eta \frac{\partial u}{\partial y}$ , having set $\vec{v} = (u, v, w)$, and so:

$$F_x = \eta \frac{\partial u}{\partial y} \cdot S \qquad (1.4)$$

We now use (1.4) on a small fluid volume dV in Fig. 2:



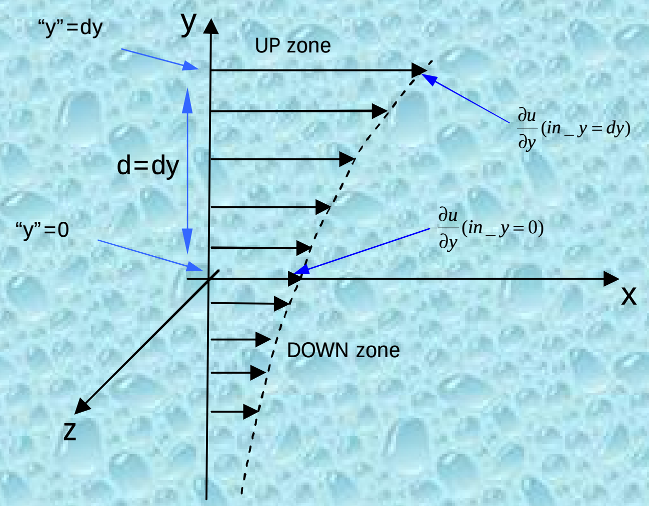




Fig. 2: Smal volume of fluid dV.

Fig. 3: Axis y, faces 2 and 5.

In Fig. 3 we have reproduced what shown in Fig. 1, but in a three-dimension context.

<u>Faces 2 and 5:</u>

so, with reference to Fig. 3, let's figure out the viscous forces (due to variations of u) on faces 2 and 5 of the small volume, that is those we meet when moving along the y axis, by using (1.4):

<u>Viscous shear stress on face 2</u> $=+h[\frac{\partial u}{\partial y}(in\_y=dy)]dxdz$

$\frac{\vec{v}}{d}\ in\_(1.3)$ $\quad S\_in\_(1.3)$

This force acting on face 2 is positive (+) because the fluid over the point where it's figured out (UP zone) has got a higher speed (longer horizontal arrows) which drags S along the positive x.

On face 5, on the contrary, we'll have a (-) negative sign, because the fluid under such S surface has got a lower speed (down) and want to be dragged, so making a resistance, that is a negative force:

<u>Viscous shear stress on face 5</u>$=-h[\frac{\partial u}{\partial y}(in\_y=0)]dxdz$

The resultant on x is the difference between the two equations, or better, the algebraic sum:

$F_{x(y)}=h[\frac{\partial u}{\partial y}(y=dy)-\frac{\partial u}{\partial y}(y=0)]dxdz=h\frac{[\frac{\partial u}{\partial y}(y=dy)-\frac{\partial u}{\partial y}(y=0)]}{dy}dxdydz=h\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dV$, after having multiplied numerator and denominator by dy. Therefore:

$$F_{x(y)} = h \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dV$$ (viscous force on x due to variations of u along y) (1.5)

Faces 3 and 6:

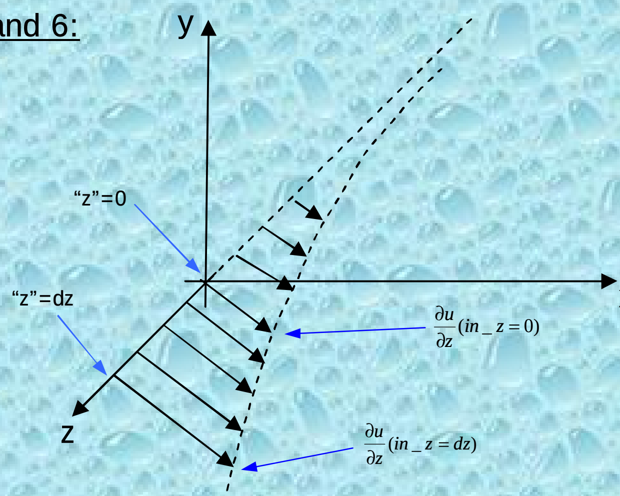



Fig. 4: Axis z, faces 3 and 6.

Similarly to the previous case, we have, as a result:

$$F_{x(z)} = h \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dV$$ (viscous force on x due to variationd of u along z) (1.6)

Faces 1 and 4:

For what case $F_{x(x)}$ is concerned, that is the viscous force on x due to variations of u (which is a component on x) along x itself, we will not talk about shear stresses, as, in such a case, the relevant force is still about x, but acts on S=dydz, which is orthogonal to x; so, it's about a NORMAL force, a tensile/compression one, and we refer to Fig. 5 below:

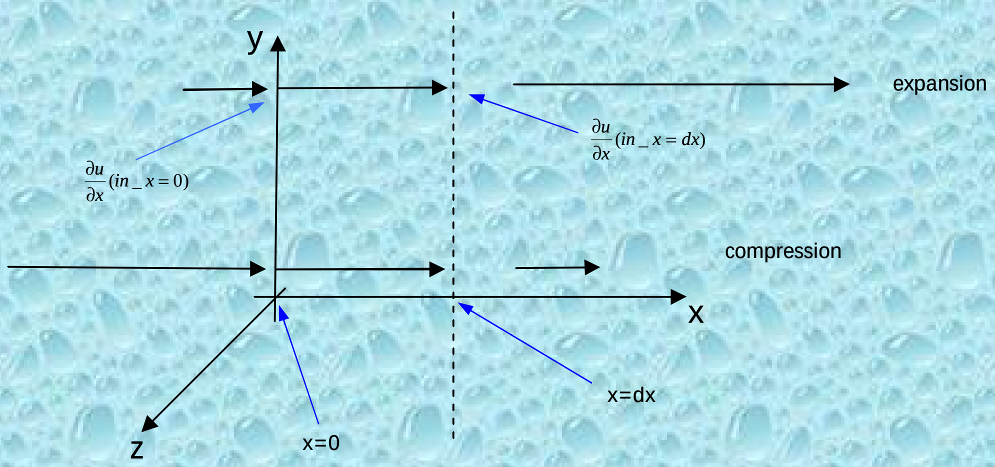



Fig. 5: Axis x, faces 1 and 4.

Anyway, nothing changes with numbers, with respect to previous cases, and we have:

$$F_{x(x)} = h\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dV$$ (viscous force on x due to variations of u along x itself) (1.7)

Now that we have three components of the viscous forces acting along x (that is those due to variations of the u component (comp. x) of speed $\vec{v}$, with respect to y, z and x itself), let's sum them up and get $F_{x-visc}$ :

$$F_{x-visc} = h\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dV + h\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dV + h\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dV = h \cdot dV(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) = h \cdot dV \cdot \nabla^2 u$$ , and we rewrite it below:

$$F_{x-visc} = h \cdot dV \cdot \nabla^2 u \qquad (1.8)$$

Now we carry out the same reasonings fora n evaluation of $F_{y-visc}$ and of $F_{z-visc}$, and obviously get ($\vec{v} = (u, v, w)$):

$$F_{y-visc} = h \cdot dV \cdot \nabla^2 v \qquad (1.9)$$

$$F_{z-visc} = h \cdot dV \cdot \nabla^2 w \qquad (1.10)$$

from which, finally, by adding (1.8), (1.9), and (1.10), we have:

$$\vec{F}_{visc} = F_{x-visc}\hat{x} + F_{y-visc}\hat{y} + F_{z-visc}\hat{z} = h \cdot dV[\hat{x}\nabla^2 u + \hat{y}\nabla^2 v + \hat{z}\nabla^2 w] = h \cdot dV \cdot \nabla^2 \vec{v}$$ che riscriviamo:

$$\vec{F}_{visc} = h \cdot dV \cdot \nabla^2 \vec{v} \qquad (1.11)$$

Now, such a $\vec{F}_{visc}$ must be used in (1.2), after having divided it by $r$ and by dV (that is, for $M = r \cdot dV$), as both sides of (1.2) have got the dimensiono f a force per a mass, indie, so:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla} v^2 = -\frac{\vec{\nabla} p}{r} - \vec{\nabla} f + \frac{h}{r} \cdot \nabla^2 \vec{v} \qquad (1.12)$$

And therefore, finally, the **Navier-Stokes Equation**, and we write it better again:

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla} v^2}_{\text{General acceleration}} = -\underbrace{\frac{\vec{\nabla} p}{r}}_{\text{Pressure forces}} - \underbrace{\vec{\nabla} f}_{\text{Gravity forces}} + \underbrace{\frac{h}{r} \cdot \nabla^2 \vec{v}}_{\text{Viscous forces}}$$

$$\frac{\vec{F}}{M} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial}........$$

General acceleration

Pressure forces

Gravity forces

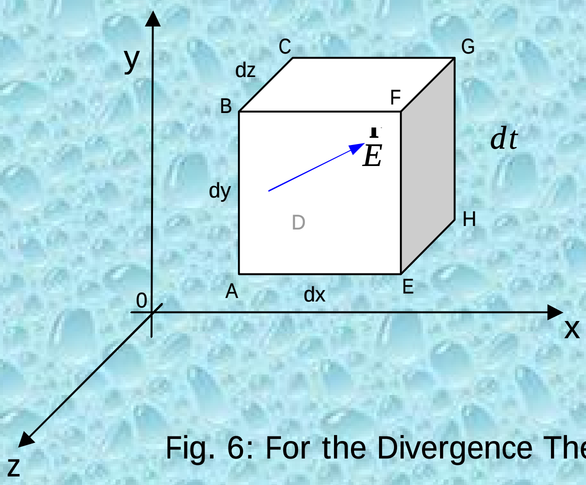
Viscous forces

## Appendixes:

Appendix 1) Compressible fluids – very rare cases:

for those cases, $r \neq const$, >> $\frac{\partial r}{\partial t} \neq 0$, >> $\vec{\nabla}(r\vec{v}) \neq 0$, and to (1.12) we have to add the following term: $+\frac{(h+h')}{r}\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$ , but (1.12) already enclose a big series of practical cases...

Appendix 2) Divergence Theorem (practical proof):




$$\boxed{\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V div\vec{E} \cdot dV}$$

Fig. 6: For the Divergence Theorem.

Name $f$ the flux of the vector $\vec{E}$; we have:

$df_{ABCD} = \vec{E} \cdot d\vec{S} = -E_x(x, \bar{y}, \bar{z})dydz$ ($\bar{y}$ means y "mean")

$df_{EFGH} = E_x(x+dx, \bar{y}, \bar{z})dydz$ , but we obviously know that also: (as a development):

$E_x(x+dx, \bar{y}, \bar{z}) = E_x(x, \bar{y}, \bar{z}) + \frac{\partial E_x(x, \bar{y}, \bar{z})}{\partial x}dx$ so:

$df_{EFGH} = E_x(x, \bar{y}, \bar{z})dydz + \frac{\partial E_x(x, \bar{y}, \bar{z})}{\partial x}dxdydz$ and so:

$df_{ABCD} + df_{EFGH} = \frac{\partial E_x}{\partial x}dV$ . We similarly act on axes y and z:

$$df_{AEHD} + df_{BCGF} = \frac{\partial E_y}{\partial y}dV$$

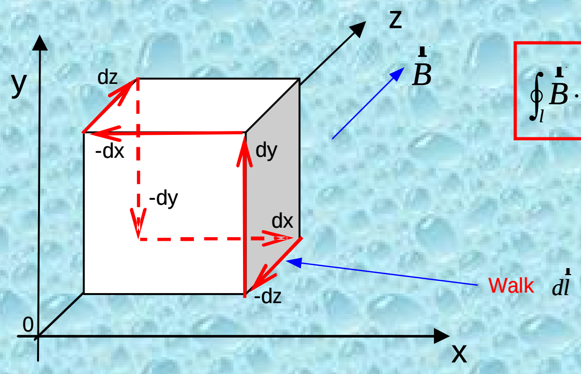
$$df_{ABFE} + df_{CGHD} = \frac{\partial E_z}{\partial z}dV$$

And then we sum up the fluxes so found, having totally:

$df = (\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z})dV = (div \cdot \vec{E})dV = (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})dV$ therefore:

$f_S(\vec{E}) = \int_f df = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V div\vec{E} \cdot dV = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \cdot dV$ that is the statement.

Appendix 3) <u>Rotor or Stokes' Theorem (practical proof-**by Rubino!**)</u>:




$$\boxed{\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_S rot\vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_S \vec{\nabla}\times\vec{B}\cdot d\vec{S}}$$

Fig. 7: For the Rotor Theorem (proof by Rubino).

Let's figure out $\vec{B}\cdot d\vec{l}$ :

On dz B is $B_z$; on dx B is $B_x$; on dy B is $B_y$;

on -dz B is $B_z + \frac{\partial B_z}{\partial x}dx - \frac{\partial B_z}{\partial y}dy$ , for 3-D Taylor's development and also because to go from the center of dz to that of –dz we go up along x, then we go down along y and nothing along z itself.

Similarly, on -dx B is $B_x - \frac{\partial B_x}{\partial z}dz + \frac{\partial B_x}{\partial y}dy$ and on -dy B is $B_y - \frac{\partial B_y}{\partial x}dx + \frac{\partial B_y}{\partial z}dz$ .

By summing up all contributions:

$$\vec{B}\cdot d\vec{l} = B_z dz - (B_z + \frac{\partial B_z}{\partial x}dx - \frac{\partial B_z}{\partial y}dy)dz + B_x dx - (B_x - \frac{\partial B_x}{\partial z}dz + \frac{\partial B_x}{\partial y}dy)dx + B_y dy -$$

$$+(B_y - \frac{\partial B_y}{\partial x}dx + \frac{\partial B_y}{\partial z}dz)dy = (\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z})dydz + (\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x})dxdz + (\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y})dxdy =$$

$= rot\vec{B}\cdot d\vec{S} = \vec{\nabla}\times\vec{B}\cdot d\vec{S}$ whereas here $d\vec{S}$ has got components $[\,\hat{x}(dydz)\,,\hat{y}(dxdz)\,,\hat{z}(dxdy)\,]$

that is, the statement: $\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_S rot\vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_S \vec{\nabla}\times\vec{B}\cdot d\vec{S}$ , after having reminded of:

$$rot\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} .$$

Appendix 4) The Bernoulli's Equations: $\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g z = 0$

If we are in a stationary situation, whereas $\vec{v} \neq f(t)$ >> $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ , and then $\rho = const$, and where there's no viscous forces, the Navier-Stokes Equation for sure reduce sto the Euler's one (but added with the gravitational component):

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \vec{g}$ , and, better, as we said that $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$, we have:

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \vec{g} \ . \qquad (1.13)$$

If now we consider the divergence and the gradient in terms of directional derivative, on direction $d\vec{l}$ , specifically, then we have in (1.13): $\frac{dv}{dl}$ instead of $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ , and $\frac{dp}{dl}$ instead of $\vec{\nabla} p$ and then, still in (1.13), the gravitational acceleration $\vec{g}$ (which exerts along z, downwards) must be projected along $d\vec{l}$ ($\frac{dz}{dl}$ is the relevant direction cosine), and so (1.13) becomes:

$v \frac{dv}{dl} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dl} - g\frac{dz}{dl}$ , from which: $v dv + \frac{1}{\rho} dp + g dz = 0$ and by integrating it:

$\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + gz = 0$ , and by multiplying by the density $\rho$ , we get: $\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g z = 0$
that is, really the statement!

---------------------------------

**Bibliography:**


1) *(C. Mencuccini and S. Silvestrini)* FISICA I - Meccanica Termodinamica, Liguori.

2) *(* Y. Nakayama*)* INTRODUCTION TO FLUID MECHANICS - Butterworth Heinemann.

3) *(L. D. Landau & E. M. Lifshitz)* FLUID MECHANICS - Pergamon Press.

4) ME 563 - INTERMEDIATE FLUID DYNAMICS (Lectures).

5) *(R. Feynman)* THE FEYNMAN PHYSICS II – Zanichelli.


---------------------------------